TRANSFORMÉES DE MOEBIUS

JEAN-PAUL CALVI

Le problème introduit le groupe des transformées de Moebius sur le plan complexe complété et fait établir quelques propriétés algébriques et géométriques simples. Les connaissances préalables nécessaires sont les suivantes : topologie élémentaire, calcul dans $\mathbb{C}$, groupes, homomorphismes, matrices, cercles et droites dans le plan complexe.

Notations

a) $\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes. On emploie la notation habituelle pour le conjugué. $C(a,r) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = r\}$ est le cercle de centre a et de rayon r.

b) On étend le plan complexe $\mathbb{C}$ en lui ajoutant un point, noté ∞, et appelé le *point à l'infini*. On note $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \infty$. Cet ensemble est muni d'une topologie naturelle : si $a \neq \infty$ les voisinages de a dans $\overline{\mathbb{C}}$ sont les mêmes que dans $\mathbb{C}$, autrement dit $V \in \mathcal{V}(a)$ s'il existe un disque ouvert de centre a contenu dans V ; si $a = \infty$ les voisinages de a sont les ensembles contenant $\{z : |z| > R\}$ pour un certain $R \geq 0$. Muni de cette topologie $\overline{\mathbb{C}}$ est un espace topologique *compact*. On l'appelle le compactifié d'Alexandrof de $\mathbb{C}$. Il est homéomorphe à la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ munie de sa topologie naturelle (induite par celle de $\mathbb{R}^3$). Pour cette raison on appelle souvent $\overline{\mathbb{C}}$ la *sphère de Riemann*.

$\mathcal{F}(\overline{\mathbb{C}})$ désignera l'ensemble des fonctions définies sur $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{C}})$ sera l'ensemble des bijections de $\overline{\mathbb{C}}$.

c) $\mathbf{GL}(2,\mathbb{C})$ désigne le groupe des matrices 2×2 *inversibles* à coefficients complexes.

---

1. Définition

À toute matrice
$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}(2,\mathbb{C}),$$
on associe la fonction t_M définie sur $\overline{\mathbb{C}}$ par
$$t_M(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{1.1}$$
avec la convention que si $c \neq 0$ alors $t_M(-d/c) := \infty$ et $t_M(\infty) := a/c$ tandis que si $c = 0$ alors $t_M(\infty) := \infty$.

1.1. Montrer que $t_M : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ est continue.

Toute application de $\overline{\mathbb{C}}$ dans $\overline{\mathbb{C}}$ de la forme (1.1) s'appelle une *transformée de Moebius* ou encore une *homographie*. L'ensemble des homographies sera noté $\mathcal{H}$. On remarquera que les translations $(z \to z+u)$, les rotations $(z \to e^{i\theta}(z-c)+c)$, les homothéties $(z \to \lambda(z-c)+c, \lambda \in \mathbb{R})$ sont toutes des homographies qui laissent fixe le point à l'infini.

Date: Janvier 2004.

Préparation au concours interne de l'agrégation de mathématiques. Merci de signaler les erreurs et les imprécisions en écrivant à calvi@picard.ups-tlse.fr.

2. Groupe des homographies

On considère l'application
$$t : M \in \mathbf{GL}(2,\mathbb{C}) \to t_M \in \mathcal{F}(\overline{\mathbb{C}}).$$

2.1. Montrer que pour tout $(M,N) \in \mathbf{GL}(2,\mathbb{C})$ on a $t_{MN} = t_M \circ t_N$.

2.2. Montrer que les homographies sont des homéomorphismes de $\overline{\mathbb{C}}$, que $[t_M]^{-1} = t_{M^{-1}}$.

2.3. Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{C}})$.

2.4. Quel est le noyau de l'homomorphisme $t : M \in \mathbf{GL}(2,\mathbb{C}) \to t_M \in \mathcal{H}$? En déduire un isomorphisme entre $\mathcal{H}$ est un groupe quotient de matrices.

3. Décomposition

3.1. À partir de la relation algébrique
$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{(bc-ad)}{c^2}\left(\frac{1}{z+d/c}\right)$$
écrire une homographie comme une composée de 5 applications élémentaires.

3.2. Déduire du résultat précédent une décomposition des matrices 2×2 en un produit de matrices “simples".

4. Cercles généralisés

On appelle droite de $\overline{\mathbb{C}}$ toute droite (réelle) de $\mathbb{C}$ à laquelle on rajoute le point à l'infini. C'est donc un ensemble de la forme $\{z \in \mathbb{C} : az + b\overline{z} = c\} \cup \{\infty\}$. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble formé de tous les cercles de $\mathbb{C}(\subset \overline{\mathbb{C}})$ et toutes les droites de $\overline{\mathbb{C}}$. Un élément de cet ensemble s'appelle un *cercle généralisé*.

4.1. Montrer que toute homographie laisse $\mathcal{C}$ (globalement) fixe, c'est-à-dire, si $h \in \mathcal{H}$ et γ est un cercle généralisé alors $h(\gamma)$ est aussi un cercle généralisé. (Indication : on pourra utiliser la décomposition trouvée dans la question précédente.)

5. Points fixes

On rappelle qu'un point z est appelé *point fixe* d'une application f si $f(z) = z$.

5.1. Soit h une homographie. Montrer que h admet au moins un point fixe et si h possède plus de deux points fixes alors elle coïncide avec l'identité. Donner une condition nécessaire et suffisante sur ses coefficients pour que h admette exactement deux points fixes.

5.2. On dit que deux homographies h_1 et h_2 sont *conjuguées* s'il existe $s \in \mathcal{H}$ telle que
$$h_2 = s \circ h_1 \circ s^{-1}.$$
Dans ce cas, si z_1 et z_2 sont deux points fixes de h_1, quels sont les points fixes de h_2 ?

6. Homographies ayant deux points fixes

6.1. Déterminer l'ensemble des homographies qui admettent 0 et ∞ comme points fixes.

6.2. Montrer que toute homographie h qui admet deux points fixes est conjuguée à une homographie de la forme $z \to qz$ avec $q \in \mathbb{C}$. (Indications : lorsque les deux points fixes z_1 et z_2 sont finis, c'est-à-dire sont dans $\mathbb{C}$, on considérera l'homographie $s(z) = \frac{z-z_1}{z-z_2}$. Lorsque l'un des deux points, disons z_2, est égal à ∞ on considérera $s(z) = z - z_1$.)

6.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $h \in \mathcal{H}$ on définit la suite d'homographie $h^{[n]}$ par la relation de récurrence $h^{[1]} = h$ et $h^{[n+1]} = h \circ h^{[n]}$. Démontrer que si h est une homographie ayant deux points fixes *finis* z_1 et z_2 alors il existe un nombre complexe non nul q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$h^{[n]}(z) = \frac{(z_1 - q^n z_2)z - (1-q^n)z_1 z_2}{(1-q^n)z - z_2 + q^n z_1}.$$

7. Homographies ayant un point fixe unique

7.1. En s'inspirant de la méthode du paragraphe précédent, montrer qu'une homographie qui a un point fixe unique est conjuguée à une translation.

7.2. Etant donné h une homographie ayant un point fixe unique, on définit $h^{[n]}$ comme dans le paragraphe précédent. Trouver une formule pour $h^{[n]}(z)$ et étudier $\lim_{n\to\infty} h^{[n]}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

8. Opération sur les triplets de points

8.1. Soit (z_1,z_2,z_3) et (z_1',z_2',z_3') deux triplets de points deux à deux *distincts* dans $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une et une seule homographie h telle que $h(z_i) = z_i'$ pour $i = 1,2,3$.

(Indication : on pourra par exemple considérer

$$r(z) = \frac{(z-z_2)(z_1-z_3)}{(z-z_1)(z_2-z_3)} \quad \text{et} \quad s(z) = \frac{(z-z_2')(z_1'-z_3')}{(z-z_1')(z_2'-z_3')}.)$$

8.2. En déduire que, étant donné deux éléments γ_1 et γ_2 de $\mathcal{C}$ il existe toujours une homographie h telle que $h(\gamma_1) = \gamma_2$.

9. Birapport

Le *birapport* ou *produit croisé* de quatre nombres complexes deux à deux distincts z_i $(i = 1,2,3,4)$ est défini par la relation

$$[z_1,z_2;z_3,z_4] = \frac{(z_1-z_3)/(z_2-z_3)}{(z_1-z_4)/(z_2-z_4)} = \frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_2-z_3)(z_1-z_4)}. \tag{9.1}$$

9.1. Vérifier que $[z_1,z_2;z_3,z_4] = [z_2,z_1;z_4,z_3]$.

9.2. Montrer que le birapport est invariant par les homographies. En d'autres termes, si $h \in \mathcal{H}$ et (z_i) $(i = 1,2,3,4)$ est un quadruplet de nombres complexes deux à deux distincts alors

$$[h(z_1),h(z_2);h(z_3),h(z_4)] = [z_1,z_2;z_3,z_4].$$

9.3. Soient (z_i) et (z_i') $(i = 1,2,3,4)$ deux quadruplets de nombres complexes deux à deux distincts. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une homographie (forcément unique) qui envoie z_i sur z'_i pour $i = 1,2,3,4$ est que $[z_1,z_2;z_3,z_4] = [z'_1,z'_2;z'_3,z'_4]$.

9.4. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que quatre nombres complexes z_1,z_2,z_3,z_4 se trouvent sur un cercle généralisé (i.e. soient cocycliques ou alignés) est que leur birapport $[z_1,z_2;z_3,z_4]$ soit un nombre réel. Retrouver à partir de ce résultat une condition (classique) de cocyclicité exprimée en termes d'angles.

10. Inversions et homographies

On dit que deux nombres complexes z_1 et z_2 sont *inverses* par rapport au cercle $\Gamma = C(c,\rho)$ lorsque

$$(z_1 - c)(\overline{z_2} - \overline{c}) = \rho^2.$$

On étend naturellement la définition en disant que ∞ et c sont inverses par rapport à Γ. On remarquera aussi que tout point de Γ est inverse de lui-même. On dira en outre que z_1 et z_2 sont inverses par rapport à une droite D lorsque la symétrie (orthogonale) d'axe D envoie l'un sur l'autre. (Dans ce cas on convient que ∞ est inverse de lui-même.) Par conséquent nous pourrons librement parler de points inverses par rapport à un cercle généralisé quelconque.

10.1. Soit a et b deux nombres complexes distincts et μ un nombre réel positif. Montrer que l'ensemble γ défini par

$$\gamma = \left\{ z \in \overline{\mathbb{C}} : \left| \frac{z-a}{z-b} \right| = \mu \right\}$$

est un cercle généralisé et que γ est une droite si et seulement si $\mu = 1$. Vérifier que lorsque γ est un cercle alors a et b sont inverses par rapport à γ.

10.2. Réciproquement, montrer que si a et b sont deux nombres complexes distincts inverses l'un de l'autre par rapport à un cercle γ alors il existe un réel μ tel que $\gamma = \left\{ z \in \overline{\mathbb{C}} : \left| \frac{z-a}{z-b} \right| = \mu \right\}$.

10.3. Soit $h \in \mathcal{H}$. Démontrer que si a et b sont deux éléments de $\overline{\mathbb{C}}$ inverses par rapport à un cercle généralisé γ alors $h(a)$ et $h(b)$ sont inverses par rapport à $h(\gamma)$.

11. Homographies laissant le disque unité invariant

11.1. Soit Γ un cercle (ordinaire) du plan complexe et h une homographie. Montrer que h envoie l'intérieur de Γ sur l'intérieur de $h(\Gamma)$ ou sur l'extérieur de $h(\Gamma)$.

11.2. Soit $h(z) = (az+b)/(cz+d)$. Montrer que

$$h(C(0,1)) = C(0,1) \Leftrightarrow (a\overline{b} - c\overline{d} = 0 \quad \text{et} \quad |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2).$$

11.3. Déterminer l'ensemble des homographies qui envoie le disque unité U_r sur $U_{r'}$ et qui laissent 0 invariant. (On utilise la notation $U_\rho := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$.)

11.4. Dans cette partie, on recherche l'expression des homographies qui laissent invariant le disque unité. Si h est une homographie qui envoie $U := U_1$ sur lui-même alors l'origine a un antécédent α dans l'intérieur de U. Le cas où α est égal à l'origine est traité dans la question précédente. On suppose donc $0 < |\alpha| < 1$ et on appelle β l'inverse de α par rapport à $C(0,1)$. On considère $s(z) = (z-\alpha)/(z-\beta)$. Déterminer $s(C(0,1))$. En étudiant l'application $h \circ s^{-1}$ montrer que h est de la forme $h(z) = e^{i\alpha}(z-a)/(1-\overline{a}z)$ où α est un nombre réel.

Laboratoire de Mathématiques E. Picard, Université Paul Sabatier 31062 Toulouse Cedex 4 FRANCE.

E-mail address: calvi@picard.ups-tlse.fr