POLYNÔMES ORTHOGONAUX ET APPROXIMATION POLYNOMIALE

JEAN-PAUL CALVI

1. Avertissement

La durée de l'épreuve est de 6 heures. Dans le cas où un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie, éventuellement la corrige, et poursuit l'épreuve en admettant, si nécessaire, le résultat de la question défectueuse. En général chaque partie dépend des précédentes. Les questions ou parties qui n'ont aucune influence sur la **suite** du problème sont marquées d'une astérisque.

2. Notations et préliminaires

Toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

On note Π_d l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus d à coefficients réels.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et w une fonction continue strictement positive sur I. On suppose que pour tout $d \in \mathbb{N}$,

$$\int_I |x|^d w(x)dx < \infty. \tag{2.1}$$

On dit alors que w est une **fonction poids admissible**.

On note $\mathcal{C}_w$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur I telles que

$$\int_I |f^2| w(x)dx < \infty. \tag{2.2}$$

Il découle de l'hypothèse (2.1) que tous les polynômes sont éléments de $\mathcal{C}_w$. On définit sur $\mathcal{C}_w$ un **produit scalaire**, noté $(\cdot,\cdot)$, par

$$(f,g) = \int_I f(x)g(x)w(x)dx. \tag{2.3}$$

La **norme** associée à ce produit scalaire est notée $\|\cdot\|$. Sous l'hypothèse que w est une fonction poids admissible, on démontre qu'il existe une unique suite de polynômes T_d, $d = 0,1,\dots$, telle que

(1) T_d est un polynôme unitaire de degré d, autrement dit T_d est de la forme $T_d(x) = x^d + c_{d-1}x^{d-1} + \cdots + c_1 x + c_0$.
(2) $(T_d,Q) = 0$ pour tout polynôme $Q \in \Pi_{d-1}$.

Date: 28 septembre 2006.
Préparation au concours interne de l'agrégation de mathématiques.

Cette suite de polynômes s'appelle la suite des **polynômes orthogonaux unitaires** associés à w. Par définition $T_0 = 1$. On note U_d la suite de **polynômes orthonormaux** correspondante, $U_d = T_d/\|T_d\|$. La suite U_d, $d = 0,1,\ldots$ est caractérisée par les trois propriétés suivantes : elle est formée de polynômes de norme 1, de coefficient dominant positif et chaque U_d est orthogonal à Π_{d-1}. On note k_d le coefficient dominant de U_d,

$$U_d(x) = k_d x^d + (\text{polynôme de degré} \le d-1). \tag{2.4}$$

Si $f \in \mathcal{C}_w$ et $p \in \Pi_d$, la quantité $\|f-p\|$ est minimale si et seulement si $p = S_d(f)$ où

$$S_d(f) = \sum_{i=0}^{d} (f,U_i)U_i, \tag{2.5}$$

et elle vaut alors $\sqrt{\|f\|^2 - \sum_{i=0}^{d} |(f,U_i)|^2}$.

Toutes ces propriétés sont supposées connues (ou admises) on ne demande pas de les démontrer.

3. Propriétés élémentaires des polynômes orthogonaux

3.1. Relation de récurrence.

3.1.1. Montrer que la suite de polynômes T_d vérifie la relation de récurrence

$$T_d(x) = (x - \lambda_d)T_{d-1}(x) - \mu_d T_{d-2}(x), \tag{3.1}$$

avec

$$\mu_d = \frac{\|T_{d-1}\|^2}{\|T_{d-2}\|^2} \quad \text{et} \quad \lambda_d = \frac{(xT_{d-1},T_{d-1})}{\|T_{d-1}\|^2}. \tag{3.2}$$

3.1.2. Déterminer la relation de récurrence satisfaite par les polynômes U_d (faisant intervenir les polynômes U_i et les coefficients k_i).

3.2. Montrer que T_d est l'unique polynôme unitaire de degré d de $\|\cdot\|$-norme minimale, autrement dit

$$\left(q(x) - x^d \in \Pi_{d-1} \text{ et } \|q\| = \inf\{\|p\| \,:\, p(x) - x^d \in \Pi_{d-1}\}\right) \iff q = T_d.$$

3.3. Exemples $*$.

3.3.1. Montrer que pour tout $d \ge 0$, il existe un unique polynôme de degré d, noté u_d tel que $u_d(\cos\theta) = \sin(d+1)\theta/\sin\theta$, $\theta \in]0,\pi[$ et que, convenablement normalisés, ces polynômes sont les polynômes orthogonaux unitaires correspondants au poids $w(x) = (1-x^2)^{1/2}$ sur $[-1,1]$. On ne demande pas d'expliciter la normalisation.

3.3.2. Montrer que la fonction $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ est une fonction poids admissible sur $]-1,1[$ et déterminer la suite t_d des polynômes orthogonaux unitaires correspondante.

3.3.3. Dans les deux exemples précédents, exprimer u_d en fonction de u_{d-1} et u_{d-2} puis t_d en fonction de t_{d-1} et t_{d-2}.

3.3.4. Soit $d \in \mathbb{N}$. Montrer que la dérivée d-ième de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est de la forme $e^{-x^2} h_d(x)$ où h_d est un polynôme de degré d. Montrer que, convenablement normalisés, ces polynômes forment la suite de polynômes orthonormaux correspondants au poids $w(x) = e^{-x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$. Expliciter la normalisation.

3.4. **Zéros.**

3.4.1. Montrer que T_d possède d racines réelles (deux à deux) distinctes qui se trouvent dans l'intérieur de I.

Indication. Notant A l'ensemble des racines de T_d de *multiplicité impaire* dans l'intérieur de I, on pourra considérer le polynôme $q(x) = \prod_{a \in A}(x-a)$ (le produit est égal à 1 si A est vide), calculer (T_d,q) et étudier le signe de $T_d q$.

3.4.2. Soit $f \in \mathcal{C}_w$. On note $R_d(f) = f - S_d(f)$. Montrer en utilisant la même technique que dans la question précédente que $R_d(f)$ s'annule en au moins $d+1$ points de l'intérieur de I.

Indication. On considèrera l'ensemble A formé des points en lesquels (autour desquels) $R_d(f)$ change de signe. Pour montrer qu'il change de signe en au moins 1 point, on pourra utiliser, après l'avoir justifié, $(R_d(f),1) = 0$.

3.4.3. Déduire de la question précédente qu'il existe un ensemble $Y^d(f)$ tel que $S_d(f) = L[Y^d(f),f]$ où $L[Y^d(f),f]$ désigne le polynôme d'interpolation de Lagrange de f par rapport aux points de $Y^d(f)$.

3.5. **Le noyau polynomial.**

3.5.1. A l'aide de la formule de récurrence obtenue à la question 3.1.2 établir l'identité suivante, dite **formule de Darboux**,

$$\sum_{i=0}^{d} U_i(x)U_i(y) = \frac{k_d}{k_{d+1}} \frac{U_{d+1}(x)U_d(y) - U_d(x)U_{d+1}(y)}{x-y}. \tag{3.3}$$

On observera que le terme de droite est bien défini lorsque $x = y$.

3.5.2. En déduire que

$$\sum_{i=0}^{d} U_i^2(x) = \frac{k_d}{k_{d+1}}\Big(U'_{d+1}(x)U_d(x) - U'_d(x)U_{d+1}(x)\Big). \tag{3.4}$$

On notera

$$K_d(x,y) = \sum_{i=0}^{d} U_i(x)U_i(y) \tag{3.5}$$

L'application K_d s'appelle le d-ième **noyau polynomial** de w.

3.6. **Caractérisation du noyau.**

3.6.1. Montrer que pour tout $p \in \Pi_d$, on a

$$(p\,, K_d(\cdot\,,y)) = p(y). \tag{3.6}$$

3.6.2. Réciproquement montrer que si $F(x,y)$ est une fonction polynomiale de degré au plus d en x ainsi qu'en y telle que l'identité $(p\,,F(\cdot\,,y)) = p(y)$ est satisfaite pour tout p de degré au plus d et tout y alors $F = K_d$.

3.6.3. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}_w$, on a

$$S_d(f)(y) = \int_I K_d(y,x) f(x) w(x) dx. \tag{3.7}$$

3.7. **Un problème d'extremum $*$.** Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose

$$S = \{p \in \Pi_d \,:\, \|p\| = 1\}$$

et on définit sur S la fonction Φ_a par $\Phi_a(p) = |p(a)|^2$. Montrer que le maximum de Φ_a est atteint exactement en deux points qui sont

$$p(x) = \pm \frac{K_d(a,x)}{K_d(a,a)}. \tag{3.8}$$

Indication. On pourra partir de la relation $p(a) = \sum_{i=0}^{d} (p\,, U_i) U_i(a)$.

4. Quadratures et nombres de Christoffel

Dans toute la suite, on note $x_1^d, \ldots, x_d^d$ les d racines de T_d. On note ℓ_j^d le polynôme fondamental de Lagrange correspondant à x_j^d, c'est-à-dire, l'unique polynôme de Π_{d-1} qui s'annule en x_i^d pour $i \in \{1, \ldots, d\} \setminus \{j\}$ et qui prend la valeur 1 en x_j^d.

4.1. Montrer que

$$\ell_j^d(x) = \frac{U_d(x)}{U_d'(x_j^d)(x - x_j^d)}. \tag{4.1}$$

On pose

$$\lambda_j^d = \int_I \ell_j^d(x) w(x) dx. \tag{4.2}$$

Les nombres λ_j^d sont appelés **nombres de Christoffel**.

4.2. **Formules de quadratures de Gauss.** Montrer que pour tout $p \in \Pi_{2d-1}$ on a

$$\int_I p(x) w(x) dx = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j^d p(x_j^d). \tag{4.3}$$

Indication. Ecrire $p = qU_d + r$ avec $r \in \Pi_{d-1}$ et utiliser la formule d'interpolation de Lagrange pour r.

4.3. Démontrer que pour tout m et tout n dans $\{1, \ldots, d\}$,

$$\int_I \ell_n^d(x)\, \ell_m^d(x) w(x) dx = \lambda_n^d \delta_{mn} \tag{4.4}$$

où δ_{nm} est le symbole de Kronecker habituel qui vaut 0 sauf si $n = m$ auquel cas il vaut 1.

On remarquera en particulier que cette propriété implique que les nombres de Chritoffel sont positifs.

4.4. Démontrer, par exemple en utilisant la caractérisation de la question 3.6.2, que

$$K_{d-1}(x,y) = \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{\lambda_j^d} \ell_j^d(x)\ell_j^d(y). \tag{4.5}$$

En déduire que

$$\frac{1}{\lambda_j^d} = K_{d-1}(x_j^d,x_j^d) = K_d(x_j^d,x_j^d). \tag{4.6}$$

5. Suite de quadratures

Dans cette partie on suppose que I est un intervalle fermé borné, $I = [a,b]$. On note $C[a,b]$ l'espace vectoriel normé des fonctions continues sur $[a,b]$ muni de la norme uniforme, notée $\|\cdot\|_\infty$. On rappelle que $C[a,b]$ est un espace de Banach (i.e. est un espace vectoriel normé complet). On note $X^d = \{x_1^d, \ldots ,x_d^d\}$ l'ensemble des racines de T_d et on définit Q_d sur $C[a,b]$ par

$$Q_d(f) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_j^d\, f(x_j^d). \tag{5.1}$$

On observera que

$$Q_d(f) = \int_I L[X^d,f](x)w(x)dx$$

où $L[X^d,f]$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange de f par rapport aux points de X^d.

Il a précédemment été établi que $Q_d(f) = \int_I f(x)w(x)dx$ dès lors que $f \in \Pi_{2d-1}$.

5.1. Montrer que Q_d est une application linéaire continue de norme $\int_I w(x)dx$.

5.2. Montrer que pour tout $f \in C[a,b]$, $Q_d(f)$ converge vers $\int_I f(x)w(x)dx$.

Indication. On pourra utiliser le théorème de Weierstrass qui dit que toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est limite uniforme sur cet intervalle d'une suite de polynômes.

6. Convergence des suites d'interpolants de Lagrange en moyenne quadratique ∗

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, on veut montrer que $\|f - L[X^d,f]\|$ converge vers 0 lorsque d tend vers ∞. Autrement dit, $L[X^d,f]$ converge vers f dans $\mathcal{C}_w$.

6.1. Etablir l'inégalité suivante

$$\|f - L[X^d,f]\|^2 \leq \|f\|^2 + Q_d(f^2) + 2\sqrt{Q_d(f^2)}\,\|f\|. \tag{6.1}$$

6.2. Démontrer le résultat annoncé sur la convergence.

Indication. On pourra appliquer l'inégalité précédente avec $f - p$ à la place de p où p est un polynôme bien choisi.

7. Etude des zéros comme fonctions de w

Dans cette partie on suppose que I est un intervalle fermé borné, $I = [a,b]$ et w est une fonction continue positive définie sur $[a,b] \times [c,d]$ de telle sorte que pour tout $y \in [c,d]$, la fonction $w(\cdot,y)$ est une fonction poids admissible sur $[a,b]$. On note T_d^y (respectivement, U_d^y) les polynômes orthogonaux unitaires (respectivement orthonormaux de coefficients dominant positifs) correspondants aux poids $w(\cdot,y)$. Les d racines de T_d^y dont on sait qu'elles sont distinctes et dans $]a,b[$ sont rangées par ordre croissant,

$$a < x_1^d(y) < x_2^d(y) < \cdots < x_d^d(y) < b. \tag{7.1}$$

De la même manière les nombres de Christoffel associés à ces racines sont notés $\lambda_j^d(y)$.

On se propose d'étudier les fonctions $y \mapsto x_j^d(y)$.

Nous admettrons que si les coefficients de T_d^y (dans la base x^k, $k = 0,\ldots,d$) sont des fonctions continûment dérivables de y alors les fonctions $x_i^d(y)$ sont aussi des fonctions continûment dérivables de y.

7.1. Montrer que si les dérivées partielles de w par rapport à y existent et sont continues sur $[c,d]$ alors les coefficients de T_d^y ainsi que les nombres de Christoffel sont des fonctions continûment dérivables de y.

7.2. Dériver la relation (4.3) en fonction de y. Puis, en appliquant le résultat avec

$$p(x) = \frac{(U_d^y(x))^2}{(x - x_j^d)},$$

établir que

$$\int_a^b \frac{\partial w}{\partial y}(x,y)\frac{(U_d^y(x))^2}{(x - x_j^d(y))}dx = \lambda_j^d(y)\left((U_d^y)'(x_j^d(y))\right)^2 (x_j^d)'(y). \tag{7.2}$$

7.3. Montrer que si, pour tout y, la fonction

$$x \mapsto \frac{\partial w/\partial y}{w}(x,y)$$

est une fonction croissante alors les fonctions $x_j^d(y)$ sont des fonctions croissantes de y.

Indication. On pourra d'abord établir que le terme de gauche dans (7.2) est égal à

$$\int_a^b \left(\frac{\partial w}{\partial y}(x,y) - \frac{\frac{\partial w}{\partial y}(x_j^d(y),y)}{w(x_j^d(y),y)}w(x,y)\right)\frac{(U_d^y(x))^2}{(x - x_j^d(y))}dx.$$

7.4. Montrer que si w_1 et w_2 sont deux fonctions poids admissibles sur $[a,b]$ telles que w_2/w_1 soit une fonction strictement croissante sur $[a,b]$ alors, avec une notation évidente, $x_j^d(w_1) < x_j^d(w_2)$ pour tout d et tout j entre 1 et d.

Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier 31062 Toulouse Cedex 9 FRANCE.

E-mail address: jean-paul.calvi@math.ups-tlse.fr