RÉSUMÉ DES TRAVAUX

JEAN-PAUL CALVI

RÉSUMÉ. Cet article contient une présentation informelles des thèmes de recherche de Jean-Paul Calvi et des résultats obtenus. Il couvre divers aspects de théorie de l'approximation concernant aussi bien des questions de mathématiques fondamentales, computationnelles ou d'analyse numérique. L'essentiel est accessible au non spécialiste.

TABLE DES MATIÈRES

Date: 11 décembre 2010.

Ce texte contient dans sa version électronique des hyperliens ouverts dirigés vers les résumés de mes articles. L'accès aux versions éditeur de ces mêmes articles est restreint et consenti seulement à des fins d'évaluation. Cependant, une copie de ces documents, y compris sous forme électronique, peut être envoyée à toute personne intéressée qui m'en fera la demande par courriel.

1. Introduction

1.1. **Théorie constructive des fonctions.** Nos travaux portent sur divers aspects de la théorie constructive des fonctions, souvent des fonctions de plusieurs variables, dans lesquels se rejoignent mathématiques fondamentales et appliquées. L'objet de la théorie constructive des fonctions est d'estimer des propriétés d'une fonction, à commencer par ses valeurs, à partir d'un nombre fini d'informations. La méthode consiste généralement à construire un approximant de la fonction à l'aide des informations et à étudier l'erreur entre l'approximant et la fonction. Les approximants les plus communs sont des polynômes qui s'expriment par des opérateurs linéaires dépendant continûment (en un sens approprié) de la fonction approchée. On dit que l'approximation est *effective* lorsqu'elle directement exploitable en analyse numérique (abstraction faite, éventuellement, des problèmes purement numériques inhérents à leur calcul). À défaut, on parle d'approximation constructive *théorique*. Un exemple important d'approximation constructive théorique, rarement effective, est donné par le développement de Fourier d'une fonction analytique suivant une suite de polynômes orthogonaux par rapport à une mesure abstraite suffisamment dense. La plupart des théorèmes de densité classiques, convenablement reformulés (éventuellement approfondis), donnent lieu à des résultats constructifs théoriques et un des champs d'activité important de l'approximation constructive consiste à modifier des approximations théoriques pour obtenir de nouvelles méthodes effectives. L'interpolation de Lagrange (en des points correctement choisis) où les interpolations par des fonctions splines sont deux exemples parmi les plus classiques d'approximation constructive effective.

1.2. **Interpolation polynomiale générale.** Étant donnée une fonction f définie sur un sous ensemble de $\mathbb{K}^N$, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour laquelle les informations $\mu_i(f)$, $i = 1, \dots, s$, sont bien définies, on appelle polynôme d'interpolation de f pour les informations $\mu_i(f)$, un polynôme p de degré d sur $\mathbb{K}^N$ - on écrit $p \in \mathcal{P}^d(\mathbb{K}^N)$ — qui vérifie $\mu_i(p) = \mu_i(f)$, $i = 1, \dots, s$. Ce formalisme n'a de sens et d'intérêt que lorsque, premièrement, les μ_i sont des formes linéaires définies sur un espace fonctionnel E contenant les polynômes et, deuxièmement, le polynôme p existe et est unique pour toute fonction $f \in E$. Une condition nécessaire immédiate est que la dimension de l'espace engendré par les formes linéaires d'informations coïncide avec celle de l'espace des polynômes $\mathcal{P}^d(\mathbb{K}^n)$. Voici trois classes importants d'interpolation.

(1) Interpolations de Lagrange. Elles correspondent aux cas où les $\mu_i(f)$ sont des valeurs de la fonctions ($\mu_i(f) = f(a_i)$).

(2) Interpolations Hermitiennes. Elles sont une généralisation des précédents puisque les informations sont de la forme $\mu_i(f) = D^\alpha(f)(a_i)$ ou plus généralement $Q(D)(f)(a_i)$ où $Q(D)$ désigne un opérateur différentiel à coefficients constants.

(3) Interpolation de Fourier où $\mu_i(f) = (f, p_i)$ où E est un espace prehilbertien et les p_i forment une base orthonormale du sous-espace $\mathcal{P}^d(\mathbb{K}^N)$ de E.

Une autre famille d'interpolation, introduite au début des années 1980, et qui forme pratiquement l'unique alternative aux trois exemples précédents sera présentée plus avant.

1.3. **Les mathématiques.** Nous utilisons un champs d'outils assez étendu : analyse complexe classique, analyse pluricomplexe, en particulier, formules de représentation intégrale et théorie du pluripotentiel, analyse numérique, y compris analyse numérique matricielle ; inégalités polynomiales, notamment l'inégalité de Markov (qui estime les valeurs des dérivées d'un polynôme en fonction des valeurs du polynômes), géométrie différentielle élémentaire. Mes intérêts actuels sont de plus en plus orientés vers des questions de mathématiques computationnelles.

2. Procédures alternatives d'approximation et interpolation en plusieurs variables

2.1. **Interpolation en moyennes généralisées.** Calvi (1993*b*) présente une étude de la définition, des propriétés et donnent (spécialement dans le cas des fonctions entières) des théorèmes de convergence précis [1] sur la méthode d'interpolation polynomiale basée sur des informations du type

Polynomial interpolation with prescribed analytic functionals

Résumé

Article

$$\mu_i(D^\alpha f), \quad |\alpha| = i, \quad i = 0, 1, \dots d.$$

On emploie ainsi $d+1$ fonctionnelles (formes linéaires continues) et chaque dérivée partielle d'ordre α est employée avec $\mu_{|\alpha|}$ pour fournir une des

$$\binom{N+d}{d} = \dim \mathcal{P}^d(\mathbb{C}^N)$$

informations nécessaires à la construction d'un unique polynôme d'interpolation de degré d. Ici, nous supposons que nous travaillons dans un espace complexe. Les problèmes ont des pendants immédiats dans le cas réel (pour des fonctions suffisamment différentiables) qui seront évoqués plus loin.

1. Les hypothèses s'y expriment en termes de "grandeur" des supports des fonctionnelles, correspondant dans le cas classique à la croissance des modules des points d'interpolation

L'exemple le plus intéressant est celui dans lequel les μ_i sont les fonctionnelles du simplexes attachées à $d+1$ points non nécessairement distincts $a_0, a_1, \ldots, a_d$. Ces μ_j's sont définies par la relation

$$\mu_j(f) = \int_{\Delta^j} f\left(\sum_{i=0}^{j} t_i a_i\right) dm(t) \tag{1}$$

où Δ^j est le simplexe standard $\Delta^j = \{(t_0, \ldots, t_j) : \sum_{i=0}^{j} t_i = 1\}$ et dm est la mesure de Lebesgue sur Δ^j. L'interpolation polynomiale obtenue à l'aide de ces fonctionnelles par le procédé précédemment défini s'appelle *l'interpolation de Kergin*. Elle a été introduite, d'une manière différente, plus abstraite, par l'élève de T. Bloom, P. Kergin en 1978. La présentation ci-dessus est due à C. Micchelli et, indépendamment, P. Milman. Dans le cas d'une variable, on retrouve l'interpolation de Lagrange-Hermite habituelle car une formule de Hermite-Genocchi montrent que les $\mu_i(f^{(i)})$'s ne sont autres que les différences divisées de f.

Les polynômes d'interpolation de Kergin possèdent plusieurs propriétés remarquables :

(1) ils interpolent (au sens classique) la fonction f en chacun des points a_i (donnant une interpolation de type Hermite lorsque certains points sont répétés),
(2) ils dépendent continûment de ces points (pour des fonctions suffisamment régulières),
(3) ils sont intrinsèques (en ce sens que les opérateurs d'interpolation de Kergin commutent naturellement avec les automorphismes affines) [1].

En outre, ils se calculent très simplement dans le cas des fonctions de la forme

$$f(z) = g(\lambda \cdot z)$$

avec g fonction d'une variable et

$$\lambda \cdot z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot z_k.$$

En effet, dans ce cas, ils sont donnés par

$$\mathbf{L}[\lambda \cdot a_0, \ldots, \lambda \cdot a_d; g](\lambda \cdot z)$$

où la lettre $\mathbf{L}$ est mise pour désigner l'interpolant de Lagrange classique (d'une variable). Cette propriété est d'ailleurs la clef des résultats sur la convergence des interpolants de Kergin (voir ci-dessous 2.2).

1. Ces trois propriétés suffisent d'ailleurs à caractériser l'interpolation de Kergin.

La définition de la fonctionnelle du simplexe nécessite que la fonction f soit définie dans l'enveloppe convexe des points a_i. Dans $\mathbb{C}^n$, cette condition peut être affaiblie. La condition géométrique minimale est celle d'être $\mathbb{C}$-convexe [1]. Ce résultat est dû à M. Passare et M. Andersson et il a conduit ces mathématiciens, en partie en collaboration avec R. Sigurdsson, à s'intéresser et à beaucoup clarifier la notion de $\mathbb{C}$-convexité (c. 1990).

En analyse numérique, on s'est intéressé à la fonctionnelle du simplexe pour construire des B-splines de plusieurs variables (C. Micchelli) et pour obtenir des formules d'erreurs pour l'interpolation de Lagrange (T. Sauer, Y. Xu, C. de Boor). Nous indiquerons dans la section 4 une application de l'interpolation de Kergin à l'interpolation de Lagrange.

The polynomial projectors that preserve homogeneous differential relations : a new characterization of Kergin interpolation

Résumé

Article

La présentation de l'interpolation de Kergin obtenue dans Calvi and Filipsson (2004) met en évidence une propriété remarquable de l'interpolation de Kergin. Nous considérons les projecteurs polynomiaux qui préservent les relations différentielles homogènes (en bref RDH). Un projecteur linéaire (continu) π, disons de $H(\mathbb{C}^n)$ l'espace des fonctions entières sur $\mathcal{P}_d(\mathbb{C}^n)$ l'espace des polynômes de degré d est dit préserver les RDH si toute relation de la forme

$$\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha D^\alpha f = 0$$

où k est un entier positif quelconque entraîne aussi

$$\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha D^\alpha \pi(f) = 0.$$

Nous avons caractérisé ces projecteurs et montré qu'ils coïncident avec ceux que j'avais déjà étudiés dans Calvi (1993*b*) (voir ci-dessus). Surtout, nous avons caractérisé les projecteurs de Kergin comme étant, parmi les projecteurs (de degré d) qui préservent les relations différentielles homogènes, ceux qui interpolent (au sens classique) en le plus grand nombre de points possible, à savoir $d+1$. Nous y définissons aussi la notion de dérivée d'un projecteur préservant les HDR, notion qui permet de comprendre les liens de l'interpolation de Kergin avec d'autres projecteurs introduits sensiblement à la même époque, comme *l'interpolation d'Hakopian* ou encore la *mean value interpolation* et de réduire par la même toute question de convergence de ces projecteurs à des questions concernant l'interpolation de Kergin.

Polynomial projectors preserving homogeneous partial differential equations

Résumé

Article

Dans Dinh-Dũng et al. (2005) (annoncé et résumé dans Dũng et al. (2004)), nous avons poursuivi l'étude des projecteurs préservant les RDH.

1. Une domaine de $\mathbb{C}^n$ est dit $\mathbb{C}$-convexe si toutes ses intersections non vides avec des droites complexes sont connexes et simplement connexes.

Nous avons montré que tout projecteur qui préserve les RDH de degré k, $k \geq 1$, préserve automatiquement les RDH de degré supérieur à k. On y caractérise aussi les projecteurs de Gontcharrof comme les seuls préservant les RDH et qui ont un espace d'interpolation engendré par des fonctionnelles de Dirac et dérivées de Dirac. (L'espace d'interpolation est formé des fonctionnelles préservées par le projecteur π ie $\mu = \mu \circ \pi$.)

2.2. **Problèmes de convergence des suites d'interpolants de Kergin.** Si une fonction f se laisse représenter sous la forme

$$f(z) = \int N(z \cdot t) d\mu_f(t) \tag{2}$$

où μ est une mesure complexe ne dépendant que de f et K une fonction d'une variable alors les propriétés de $\mathbf{K}[a_0, \ldots, a_d; f]$, l'interpolant de Kergin de f par rapport aux points a_i, est donné par

$$\mathbf{K}[a_0, \ldots, a_d; f] = \int \mathbf{L}[a_0 \cdot t, \ldots, a_d \cdot t; N](t \cdot z) d\mu_f(t) \tag{3}$$

de sorte que le calcul de l'interpolant se ramène à des calculs d'interpolants classiques de Lagranges dépendant d'un paramètre. Les formules intégrales de Cauchy donnent des exemples particulièrement maniables de représentations intégrales du type ci-dessus. T. Bloom a rapidement obtenu des généralisations de théorèmes de Gelfond sur l'interpolation des fonctions entières (généralisés par la suite par M. Passare et M. Andersson). Cette technique a été utilisée dans les articles Calvi (1994), Bloom and Calvi (1995), Bloom and Calvi (1997*b*) et Bloom and Calvi (1998).

A convergence problem for Kergin interpolation. (II). Résumé

Dans les deux premiers (le second étant une amélioration des résultats du premier) on étudie le problème suivant qu'avait d'abord considéré Smirnov et Lebedev dans le plan. Etant donnés trois compacts E, F et G dans $\mathbb{C}^n$, on dit que la propriété (E, F, G) est satisfaite si quel que soit le choix d'un tableau infini A de points dans G, la suite correspondante des interpolants $\mathbf{K}[a_{0,d}, \ldots, a_{d,d}; f]$ converge vers f uniformément sur E pour toute fonction f holomorphe dans un voisinage de G. Le problème est alors de déterminer un "bon" troisième compact pour que la propriété soit satisfaite lorsque les deux autres sont fixés. La généralité du problème permet de donner des réponses satisfaisantes assez facilement même si on ne peut pas affirmer, dans le cas général, l'existence d'un compact optimal.

Plus complexe est la question de trouver, en fonction du tableau fixé $A \subset E$, le compact minimal au voisinage duquel la fonction doit être holomorphe pour assurer la convergence uniforme sur E de ses interpolants de Kergin. La question contient en particulier celle de la recherche des tableaux extrémaux [1]. Ces problèmes sont abordés dans Bloom and Calvi (1997*b*) et Bloom and Calvi (1998). Leur étude nécessite un examen assez fin de la manière dont la condition classique de Walsh varie en fonction du paramètre t lorsqu'on considère les familles de tableaux plans $A(t) = (a_{k,d} \cdot t)$, $d \in \mathbb{N}$, $k = 0, \dots, d$. Il faut en particulier passer par une reformulation adéquate de cette condition. Dans Bloom and Calvi (1998), on transforme la condition de Walsh en : A est un tableau extrémal pour E si pour tout $\mu \in \mathcal{M}(E)$ on $b(\mu) = \mu_E$ où $\mathcal{M}(E)$ désigne l'ensemble des limites faibles de la suite de probabilités

Kergin interpolants of holomorphic functions.
Résumé
Article

$$\mu_d^A = \sum_{i=0}^{d} [a_{i,d}], \tag{4}$$

$[a_{i,d}]$ désigne une mesure de Dirac au point $a_{i,d}$, $b(\mu)$, la mesure de balayage de μ et μ_E la mesure d'équilibre de E.

Les tableaux extrémaux pour l'interpolation de Kergin sont rares en dehors du cas des domaines circulaires. Nous avons par exemple démontré dans Bloom and Calvi (1998) que si K est un compact convexe totalement réel dans $\mathbb{C}^n$ (et non réduit à un point) alors K admet des tableaux extrémaux pour l'interpolation de Kergin si et seulement si K est une ellipse (éventuellement dégénérée) et dans ce cas une condition nécessaire est suffisante pour que A soit extrémal est que la suite μ_d^A (voir 4) converge faiblement vers σ définie (dans le cas non dégénéré) par

The distribution of extremal points for Kergin interpolation : real case
Résumé
Article

$$\int_K f d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2) d\theta$$

lorsque

$$K = \{a + r\cos\theta e_1 + r\sin\theta e_2, 0 \le r \le 1, \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

L'interpolation de Kergin est typiquement une méthode constructive théorique non effective. D'une part on demande des informations globales sur la fonction (des moyennes sur les simplexes ayant pour sommets les points d'interpolation) et, en réalité, sur toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre égal au degré du polynôme.

Cependant, dans certains cas, il est légitime d'espérer la transformer en une méthode effective. En effet, l'observation suivante, encore une fois due à C. Micchelli, permet de limiter (par la dimension de l'espace ambiant moins une unité) l'ordre des dérivée partielles intervenant dans le calcul des interpolants de Kergin (et d'étendre ainsi les opérateurs à des espaces de fonctions plus grands) lorsque les points d'interpolation

1. Ceux qui donnent lieu à une approximation uniforme sur E de toutes les fonctions analytiques au voisinage de E.

sont en position générale [1]. Notant

$$\int_{[a_0,\dots,a_d]} h = \int_{\Delta^j} h\left(\sum_{i=0}^{j} t_i a_i\right) dm(t) \tag{5}$$

on a

$$\int_{[a_0,\dots,a_d]} D_{a_i-a_j} f = \int_{[a_0,\dots,a_{j-1},a_{j+1},\dots a_d]} f - \int_{[a_0,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots a_d]} f \tag{6}$$

où $D_u f$ désigne la dérivée directionnelle de f suivant le vecteur u.

S'appuyant sur cette propriété, L. Bos et moi-même avons obtenu dans Bos and Calvi (1997) une nouvelle représentation des interpolants de Kergin qui nous a permis de démontrer une version bidimensionnelle d'un célèbre théorème de la théorie de l'approximation classique qui affirme que les interpolants de Lagrange aux points de Chebyshev convergent uniformément vers la fonction interpolée pour toute fonction de Lipschitz sur l'intervalle $[-1,1]$. Dans notre version, l'interpolation de Lagrange est remplacée par celle de Kergin, les points de Chebyshev par les racines de l'unité, l'intervalle $[-1,1]$ par le disque unité et l'espace Lip1 par l'espace des fonctions de classe C^2 au voisinage du disque. Pour établir le théorème nous avons démontré un théorème d'approximation polynomiale simultanée (fonction et dérivées premières) d'intérêt indépendant que L. Bos, N. Levenberg et T. Bagby ont récemment étendu. Dans ce cas, notre représentation est de la forme

Kergin interpolants at the roots of unity approximate C^2 functions.
Résumé
Article

$$\mathbf{K}(f) = \sum_{i=1}^{d} f(x^j)p_j + \sum_{1\le s<t\le d} \int_{[x^s,x^t]} D_{(x^t-x^s)^\perp} f\, p_{st} \tag{7}$$

où les x^i sont les racines de l'unité, les p_j et p_{st} des polynômes facilement calculables et $u^\perp$ le vecteur (directement) orthogonal à u et de même norme. Cette formule met en évidence qu'au moins dans ce cas la distance entre l'interpolation de Kergin et une méthode complètement effective est réduite. L'étude numérique de cette représentation cependant reste à mener.

3. Approximation uniforme par des polynômes de moindre carré discret

Dans Calvi and Levenberg (2008), nous étudions une manière d'échapper aux difficultés de l'interpolation de Lagrange tout en continuant de n'utiliser comme information sur la fonction que ses valeurs en un nombre fini de points. Bien que très utilisée en mathématiques appliquées, cette méthode n'avait encore jamais été étudiée pour approcher uniformément

Uniform approximation by discrete least squares polynomials.
Résumé
Article

1. Des points de $\mathbb{R}^N$ sont dits en position générale lorsqu'ils ne sont pas inclus dans une sous-espace affine de dimenson $\leq N$.

sur E des fonctions de plusieurs variables (et à peine dans le cas d'une seule variable). Étant donné un ensemble A fini dans un compact E, on cherche le polynôme p de degré au plus d qui minimise la quantité $\sum_{a\in A}|f(a)-p(a)|^2$. Ce polynôme existe et est unique sous réserve que A soit *déterminant* pour les polynômes de degré d (un tel polynôme s'annulant sur A devra s'annuler partout). Ici, la difficulté consiste à obtenir de bons approximants uniformes (sur E) avec des conditions faciles a vérifier sur les points de A tout en limitant le nombre de ces points [1]. Le résultat dépend naturellement de la géométrie du compact E et cette dépendance se manifeste ici par l'entremise des inégalités de Markov satisfaites (ou non) par E. Rappelons que les inégalités de Markov permettent de borner uniformément les dérivées d'un polynôme par la norme uniforme du polynôme multiplié par une constante dépendant du degré, typiquement $\|\partial P/\partial z_i\|_E \leq Mr^{\deg p}\|P\|_E$. Notre technique est aussi appliquée à l'approximation uniforme des solutions de certaines équations aux dérivées partielles elliptiques, où encore à la construction d'opérateurs d'extension de fonctions différentiables.

Nous introduisons dans ce travail la notion de réseau admissible (*admissible meshes*) et faiblement admissible (*weakly admissible meshes*) qui se sont déjà révélés très utiles dans l'étude d'autres questions dont certaines seront évoquées plus loin. Un suite de sous-ensembles finis $(A_n)_n$ est appelée un réseau faiblement admissible (weakly admissible mesh) pour le compact K si $A_n \subset K$ pour tout n et

(1) Il existe un constante C_n telle que pour tout polynôme de degré au plus n, $\max_{x\in K}|P(z)| \leq C_n \max_{x\in A_n}|P(z)|$ et la suite C_n a une croissance sous-exponentielle ($\lim_{n\to\infty} C_n^{1/n} = 1$) ;

(2) Le cardinal N_n de A_n est aussi à croissance sous-exponentielle (le seul cas pratique intéressant est celui où N_n croit comme un polynôme en n).

4. Analyse numérique de l'interpolation de Lagrange en une et plusieurs variables

4.1. **Continuité.**

Les difficultés de l'analyse de l'interpolation de Lagrange en n variables, $n > 1$, naissent du fait que, contrairement au cas $n = 1$, pour construire un interpolant de Lagrange de degré d, il ne suffit pas de choisir un nombre de points (distincts) égal à la dimension de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à d. Il faut encore que ces points ne soient pas situés sur une hypersurface algébrique de degré inférieur ou égal à d. Quand les deux conditions sont satisfaites, l'ensemble des points

1. Pour garder le coût des informations à récupérer assez bas et non pas pour limiter la difficulté du problème donnant p qui semble très peu dépendre du nombre de points.

est appelé un *ensemble (ou tableau) unisolvent* d'ordre d. Une illustration de l'instabilité créée par cette difficulté est donnée par le fait, observé par T. Bloom et N. Levenberg, que lorsque $n > 1$, il n'est plus vrai que toute fonction entière soit toujours limite uniforme (sur tout compact) de ses suites d'interpolants de Lagrange dès lors que les points d'interpolation sont bornés.

Dans Bloom and Calvi (1997*a*), considérant, un peu plus généralement, des interpolants de type Hermite, nous étudions la continuité des interpolants comme fonction des points d'interpolation. Supposons, pour simplifier, que l'on considère une suite (A_t) de tableaux unisolvents (d'ordres constants) dont tous les points tendent vers l'origine (lorsque $t \to \infty$), à quelles conditions la suite des interpolants d'une fonction suffisamment différentiable convergera-t-elle vers le polynôme de Taylor d'ordre d de f à l'origine ? Dans le cas $n = 1$, il n'y a aucune condition à rajouter. Nous donnons une condition nécessaire et suffisante lorsque $n > 1$: $\mathbf{L}[A_t](x^\alpha)$ converge vers 0 pour tout multi-indice α de longueur $d + 1$. Nous donnons des estimations assez précises et montrons sur des exemples que notre condition est optimale (quand on considère des interpolants de type Hermite). La démonstration fait appel à l'interpolation de Kergin. Celle-ci permet de substituer à f un polynôme de degré borné qui satisfait les conditions d'interpolation et dépend continûment des points d'interpolation.

A continuity property of multivariate Lagrange interpolation.
Résumé
Article

4.2. **Tableaux d'enlacements.** Les difficultés liées à sa rigidité, à son calcul, celles pour estimer l'erreur entre une fonction f et son polynôme d'interpolation [1] contraignent d'orienter les études sur l'interpolation de Lagrange vers la recherche de tableaux unisolvents explicites pour lesquels il sera possible, au cas par cas, de simplifier – d'enrichir – l'algèbre, d'obtenir des formules d'erreurs particulières, des estimations effectives. Dans Calvi (2005) nous proposons une méthode (généralisant une idée classique de O. Biermann) pour construire un tableau unisolvent, appelés *intertwinining arrays* ou *tableaux d'enlacements*, de degré d dans $\mathbb{C}^{m+n}$ à partir de deux tableaux unisolvents de degré d (les facteurs) respectivement dans $\mathbb{C}^m$ et $\mathbb{C}^n$.

Intertwining unisolvent arrays for multivariate Lagrange interpolation.
Résumé
Article

Il est possible de relier des objets importants de l'interpolation (déterminants de Vandermonde, constantes de Lebesgue, ...) du tableau d'enlacement aux objets correspondants des tableaux facteurs. Notre méthode utilise (en le précisant) un formalisme dû à T. Sauer et Y. Xu basée sur un ré-arrangement approprié des points d'un tableau unisolvent et l'ordre

1. Par exemple, on ne peut pas espérer disposer d'une formule d'erreur d'Hermite générale dans le cas de l'interpolation à plusieurs variables.

(gradlex) sur les multi-indices. La construction que nous employons se généralise utilement à d'autres projecteurs. Nous travaillons actuellement sur ce sujet.

Dans Calvi and Manh (2005) utilise la formule liant le déterminant de Vandermonde des tableaux d'enlacements à ceux des facteurs pour donner une nouvelle démonstration, élémentaire et essentiellement algébrique, de la formule du produit pour le diamètre transfini de plusieurs variables (voir 6).

A determinantal proof of the product formula for the multivariate transfinite diameter. Résumé

4.3. **Points optimaux et presque optimaux pour l'interpolation de Lagrange.** Si la caractérisation des points extrémaux qui assurent la meilleure convergence possible pour les polynômes d'interpolation de Lagrange des fonctions analytiques est connue depuis très longtemps, le calcul explicite de tels points s'avère très compliqué (hormis dans le cas des disques et des intervalles). Une suite de points (théoriquement) optimale est la suite de Leja. Étant donné un compact K polynomialement convexe régulier, une suite de Leja pour K est une suite (a_n) de points de K satisfaisant la propriété métrique suivante : a_{n+1}, $n \geq 0$, maximise le produit des distances aux points précédents, c'est-à-dire,

$$\max_{z\in K} \prod_{i=0}^{n} |z - a_i| = \prod_{i=0}^{n} |a_{n+1} - a_i|.$$

De telle suites ne peuvent pas être calculées. Dans Białas-Ciez and Calvi (2009) nous modifions cette définition en sorte d'obtenir des suites pour lesquelles nous pouvons construire des algorithmes de calcul (pour une famille très large de compacts) sans pour autant perdre la propriété d'optimalité pour l'approximation des fonctions analytiques. Nous introduisons ainsi la notion de *pseudo suite de Leja*. Une suite (b_n) d'élements de K est une pseudo suite de Leja s'il existe une suite réelle à croissance sous-exponentielles M_n telle que

Pseudo Leja sequences. Article (Open access)

$$\max_{z\in K} \prod_{i=0}^{n} |z - b_i| \leq M_{n+1} \prod_{i=0}^{n} |b_{n+1} - b_i|.$$

Nous pouvons presque toujours construire des pseudo suites de Leja avec un suite M_n constante (> 1) mais les résultats numériques les plus intéressants sont obtenus avec des suites M_n à croissance faible, typiquement à croissance logarithmique. La figure 1 donne les premiers points d'une pseudo suite de Leja construite avec M_n constante pour une courbe cardioïde. Notre technique combinée à celle de l'enlacement (voir ci-dessus) nous permet aussi de construire les premières classes générales d'ensembles effectifs de points extrémaux pour l'interpolation de Lagrange à plusieurs variables.

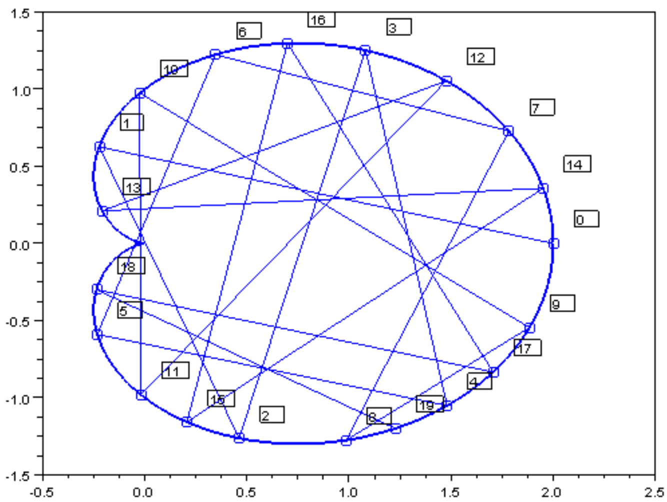

FIGURE 1. Les 20 premiers premiers d'une pseudo suite de Leja sur une cardioïde.

4.4. **Points de Fekete approchés.** Dans le cas de l'interpolation à plusieurs variables, le seul critère général connu, ie pour un compact K quelconque, pour obtenir des points optimaux ou presque optimaux est celui d'une constante de Lebesgue à croissance polynomiale. La constante de Lebesgue est la valeur maximale sur K de la somme des valeurs absolues des polynômes fondamentaux de Lagrange ; c'est aussi la norme de l'opérateur linéaire qui à une fonction continue sur K associe son polynôme d'interpolation. Les points de Fekete d'un compact K sont ceux qui maximisent le déterminant de Vandermonde. Les polynômes fondamentaux de Lagrange correspondants sont de norme 1 sur K et cela entraîne que la constante de Lebesgue est bornée par une puissance du degré d'interpolation.

Bos et al. (2010) étudie la construction de *weakly admissible meshes* et leur emploi pour obtenir des points de Fekete approché par l'entremise d'un algorithme de type Greedy appliqué à de grandes matrices de Vandermonde.

Geometric Weakly Admissible Meshes, Discrete Least Squares Approximations and Approximate Fekete Points.
Preprint
Poster

5. SCHÉMAS HERMITIENS

Un schéma hermitien d'ordre d est un ensemble $H = \{\mu_\alpha, \alpha \in S\}$ de fonctionnelles discrètes c'est-à-dire faisant intervenir les valeurs d'une fonction ou d'une de ses dérivées en un nombre fini de points, de telle sorte que pour toute fonction correctement définie il existe un unique polynôme de degré d tel que $\mu_\alpha(f) = \mu_\alpha(p)$, $\alpha \in S$. Le polynôme p est le polynôme d'interpolation correspondant au schéma H. La dimension de l'espace engendré par H doit être naturellement égale à celle de l'espace des polynômes de degré $\leq d$. Mais évidemment comme dans le cas particulier de l'interpolation de Lagrange cette condition est très loin d'être suffisante (y compris d'ailleurs dans le cas de la dimension 1). Dans Bos and Calvi (2008*a*), nous construisons de nouveaux exemples de schémas hermitiens dans $\mathbb{C}^N$ ou $\mathbb{R}^N$. La particularité de notre technique est la suivante. Les interpolants sont construits en réunissant certaines conditions différentielles sur les restrictions de la fonction à des hypersurfaces algébriques dont on utilise des paramétrisations locales. La notion de *least space* d'un espace de dimension finie de fonctions holomorphes au voisinage d'un point, développée par C. de Boor et A. Ron, joue un rôle essentiel dans la définition des conditions différentielles.

Multipoint Taylor interpolation.
Résumé
Article

En réalité, le cadre des problèmes considérés ici dépasse celui de la théorie constructive des fonctions. Ils peuvent être formulés de la manière suivante :

(1) Peut-on définir un polynôme de Taylor de degré donné intrinsèque (c'est-à-dire indépendant du choix d'une paramétrisation) pour des fonctions définies sur une hypersurface algébrique ?
(2) Si oui, peut-on recoller des polynômes de Taylor locaux (i.e. relatifs à des restrictions à des hypersurfaces) pour former un interpolant global ?
(3) Sur une même hypersurface, peux-t-on regrouper des polynômes de Taylor pour former des schémas hermitiens locaux ?

Le travail Bos and Calvi (2008*b*) donne une étude approfondie de ces questions dans le cas des courbes algèbriques du plan. Il est démontré par exemple que, pour un degré fixé, la réponse à la première question est oui sauf pour un nombre fini de point de la courbe. Le travail sur ces questions se poursuit.

Taylorian points of an algebraic curve and bivariate Hermite interpolation.
Résumé
Article

6. Polynômes et points extrémaux

6.1. **Fonction de Green-Siciak.** L'étude de l'interpolation de Kergin nous a conduit à réfléchir à la possibilité de reconstruire la *fonction extrémale de Green-Siciak* V_K d'un compact $K \subset \mathbb{C}^n$ à partir des fonctions de Green de ses projections planes $l(K)$ où l est une forme linéaire. M. Lundin et M. Baran avaient obtenus de tels résultats dans le cas où K est un compact convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$, dans lesquels ils ne faisaient intervenir que les formes linéaires réelles. L. Bos et N. Levenberg et moi-même avons en particulier travaillé sur la possibilité de renoncer à l'hypothèse *symétrique* dans le résultat de M. Baran, quitte éventuellement à autoriser les formes linéaires complexes. Nos résultats sont recueillis dans Bos et al. (2001). En général, une telle formule n'existe pas (la démonstration de ce résultat négatif est assez technique) mais nous montrons, en utilisant des propriétés géométriques élémentaires des ensembles convexes, qu'elle est vraie pour tous les points *réels*. De manière précise, si K est un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ alors pour tout point $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ on a $V_K(x) = \sup\{V_{l(K)}(l(x)) \ :\ l \in (\mathbb{R}^n)^\star,\ l \neq 0\}$ et on peut préciser pour quelle forme l le sup sera atteint.

On the Siciak extremal function for real compact convex sets.
Résumé
Article

6.2. **Diamètre transfini dans $\mathbb{C}^n$.** Le diamètre transfini $D(E)$ d'un compact $E \subset \mathbb{C}^n$ est défini comme la limite de la suite $D_d(E)$ définie par

$$D_d(E) = \sqrt[l_d]{\sup_{z_\beta \in E} \left|\det(z_\beta^\alpha)\right|} \tag{8}$$

où $l_d = \binom{n+d}{n+1}$ et, dans la matrice (z_β^α), α qui est l'exposant des monômes et β parcourent tous les multi-indices de longueur inférieure où égale à d. L'existence d'une telle limite est un théorème difficile de V. Zaharjuta. Sa démonstration permet aussi d'exprimer le diamètre transfini à l'aide de certaines *constantes de Chebyshev directionnelles*, généralisations naturelles des constantes de Chebyshev dans le plan [1], et la formule qu'il a établie est le seul point départ actuellement connu pour avancer dans la connaissances du diamètre transfini.

Le travail Bloom and Calvi (1999*a*), annoncé et résumé dans Bloom and Calvi (1999*b*), présente des résultats obtenus en collaboration avec T. Bloom sur le diamètre transfini en plusieurs variable. Nous y calculons, grâce à un détour par la théorie des polynômes orthogonaux, le diamètre transfini d'un ensemble produit quelconque $E \times F \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ en fonction de $D(E)$ et $D(F)$. Pour la première fois, on donne des résultats liant assez précisément le diamètre transfini à la fonction de Green-Siciak (via la fonction de Robin). On y démontre par exemple que si E et F sont des compacts réguliers de $\mathbb{C}^n$, on a toujours l'inégalité

On the multivariate transfinite diameter.
Résumé
Sur le diamètre transfini en plusieurs variables.
Article

$$\inf_{\mathbb{P}^{n-1}} \frac{e^{-\rho_E}}{e^{-\rho_F}} \le \frac{D(E)}{D(F)} \le \sup_{\mathbb{P}^{n-1}} \frac{e^{-\rho_E}}{e^{-\rho_F}} \tag{9}$$

où ρ_K désigne la fonction de Robin du compact K. Le choix de $F = E_R$ l'ensemble de niveau de la fonction de Green-Siciak permet d'établir $D(E_R) = RD(E)$ répondant ainsi à une question posée en 1975 par V. Zaharjuta. On trouve encore dans Bloom and Calvi (1999*a*) le calcul

1. On les obtient à partir du comportement asymptotique de certains polynômes unitaires – c'est-à-dire de coefficient dominant égal à 1 si on ordonne les monômes suivant l'ordre `grlex` – de norme uniforme minimale sur E

du diamètre transfini de l'image réciproque F d'un compact E par une application polynomiale simple q de degré m [1] : $D(F) = \sqrt[m]{D}(E)$.

6.3. **Polynômes minimaux.** Le dernier théorème cité découle de résultats sur les polynômes minimaux obtenus dans Bloom and Calvi (2000). Nous y démontrons d'abord que, étant donnés q un polynôme unitaire d'une variable à coefficients complexes, non constant, E un compact du plan et $F = q^{-1}(E)$, si $t = t_{d,E}$ est le polynôme de Chebyshev de E de degré d, c'est-à-dire l'unique polynôme unitaire de degré d de norme uniforme minimale sur E, on peut affirmer que $t \circ q$ est le polynôme de Chebyshev de F de degré md. A notre grande surprise, ce résultat bien naturel et de démonstration assez élémentaire, n'était pas encore connu. L'essentiel de l'article est consacré à étendre ce théorème au cas beaucoup plus complexe de n variables, $n > 1$. Nous y utilisons de manière essentielle des résultats de L. Aizenberg sur la résolution de systèmes polynomiaux obtenue via des formules de représentations intégrales. Outre l'application au diamètre transfini indiquée plus haut, il nous permet de construire de nouveaux exemples de polynômes minimaux de plusieurs variables, exemples dont la littérature est assez pauvre.

On multivariate minimal polynomials
Résumé

7. Autres travaux

Dans Calvi (1993*a*), nous avons étudié le problème suivant. Etant donnée une suite (L_n) de formes linéaires continues sur un espace de Fréchet E, à qu'elle condition peut-on affirmer que, quelle que soit la suite de scalaire (a_n) il existe toujours un élément f de E tel que $L_n(f) = a_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Plus que la condition elle-même, dont j'ai appris par la suite qu'elle était déjà connue de spécialistes d'analyse fonctionnelle, c'est un critère pratique pour la vérifier, critère fondé sur la structure même d'un espace de Fréchet, qui est le résultat important de cette article. Nous l'appliquons à des généralisations naturelles de théorèmes de type Mittag-Leffler.

Interpolation in Fréchet spaces with an application to complex function theory.
Résumé
Article

La note Calvi (1995) est une réflexion sur un résultat classique de Fekete et Szegö sur les polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}[i]$ irréductibles sur $\mathbb{Z}[i]$ et ayant toutes leurs racines (complexes) dans un compact donné E du plan. Le théorème de Fekete-Szegö affirme que ces polynômes sont en nombre fini dès que la capacité de E est plus petite que 1. Cette question est liée à la recherche de polynômes à coefficients entiers de norme uniforme sur E plus petite que 1. Partant d'un point de vue nouveau, nous l'étudions en employant la théorie des polynômes orthogonaux qui nous permet de préciser (sur le plan quantitatif) l'énoncé classique.

A new look at a Fekete-Szegő theorem.
Résumé

1. Une application polynomiale $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ est dite simple de degré m si pour tout $i = 1, \dots, n$ on a $q_i(z) = z_i^m +$ (termes de degré $< m$).

Références

Białas-Ciez L and Calvi J P 2009 *Ann. Mat. P. e App* p. 27. 11

Bloom T and Calvi J P 1995 *in* 'Approximation theory VIII, Vol. 1 (College Station, TX, 1995)' Vol. 6 of *Ser. Approx. Decompos.* World Sci. Publ., River Edge, NJ pp. 79–86. 6

Bloom T and Calvi J P 1997*a* *Math. Comp.* **66**(220), 1561–1577. 10

Bloom T and Calvi J P 1997*b* *Constr. Approx.* **13**(4), 569–583. 6, 7

Bloom T and Calvi J P 1998 *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **48**(1), 205–222. 6, 7

Bloom T and Calvi J P 1999*a* *Ann. Polon. Math.* **72**(3), 285–305. 14

Bloom T and Calvi J P 1999*b* *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **329**(7), 567–570. 14

Bloom T and Calvi J P 2000 *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **129**(3), 417–431. 15

Bos L and Calvi J P 1997 *J. Anal. Math.* **72**, 203–221. 8

Bos L and Calvi J P 2008*a* *Calcolo* **45**(1), 35–51. 13

Bos L and Calvi J P 2008*b* *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* **7**(3), 545–577. 13

Bos L, Calvi J P and Levenberg N 2001 *Ark. Mat.* **39**(2), 245–262. 14

Bos L, Calvi J P, Levenberg N, Sommariva A and Vianello M 2010 *Mathematics of Computation* **to appear**, 20. 12

Calvi J P 1993*a* *Indag. Math. (N.S.)* **4**(1), 17–26. 15

Calvi J P 1993*b* *J. Approx. Theory* **75**(2), 136–156. 3, 5

Calvi J P 1994 *Proc. Edinburgh Math. Soc. (2)* **37**(1), 175–183. 6

Calvi J P 1995 *in* 'Approximation theory VIII, Vol. 1 (College Station, TX, 1995)' Vol. 6 of *Ser. Approx. Decompos.* World Sci. Publ., River Edge, NJ pp. 111–118. 15

Calvi J P 2005 *Adv. Comput. Math.* **23**(4), 393–414. 10

Calvi J P and Filipsson L 2004 *East J. Approx.* **10**(4), 441–454. 5

Calvi J P and Levenberg N 2008 *J. Approx. Theory* **152**(1), 82–100. 8

Calvi J P and Manh P V 2005 *Bull. Pol. Acad. Sci. Math.* **53**(3), 291–298. 11

Dinh-Dũng, Calvi J P and Trung N T 2005 *J. Approx. Theory* **135**(2), 221–232. 5

Dũng D, Calvi J P and Trung N T 2004 *Vietnam J. Math.* **32**(1), 109–112. 5

Institut de Mathématiques, Université Paul Sabatier, Toulouse
E-mail address: jpcmath@netscape.net